



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В.
ЛОМОНОСОВА
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Лекции по курсу
Численные методы

Лектор
Н. И. Ионкин

Москва, 2018

Приложение В

Данное приложение представляет собой компактное изложение результатов и фактов глав пособия. В каждом разделе приложения изложены основные идеи главы. Они дополнены теоретическим минимумом соответствующей главы, а также таблицей сводных характеристик рассмотренных в главе методов. Строгие математические доказательства эффективности приведенных методов могут быть найдены в соответствующих главах пособия.

Глава I. Численные методы линейной алгебры

Основные идеи главы

В главе I пособия рассматриваются основные методы решения систем линейных уравнений, поиска собственных значений матриц и нахождения обратной матрицы. Для численного решения СЛАУ применяются прямые и итерационные методы.

Прямые методы: например, метод Гаусса и квадратного корня — это методы, которые позволяют получать численные решения, исходя из формул, точно (с поправкой на ошибки округления). Эффективность прямых методов оценивается по числу действий (как правило умножений и делений), необходимых для реализации метода.

Итерационные методы основаны на том, что задается начальное приближение и указывается закон, по которому определяются следующие приближения. Эффективность итерационных методов оценивается числом итераций, необходимых для достижения заданной точности ε . Ясно, что чем меньшее число итераций потребуется для нахождения численного решения с указанной выше точностью, тем более эффективен метод.

Нахождение собственных значений матрицы, как правило, аналитически неразрешимая задача. В связи с этим в общем случае задача на поиск собственных значений решается численно с использованием итерационных методов. При численном решении задачи на собственные значения рассматриваются две проблемы: частичная проблема собственных значений, т.е. нахождение отдельных собственных значений и отвечающих им собственных векторов, и полной проблемы собственных значений, состоящей в нахождении всех собственных векторов матрицы.

Одно из важных понятий первой главы пособия — понятие обратной матрицы, которое активно используется не только в контексте прямого поиска решения СЛАУ, но и при исследовании на сходимость численных методов решений различных задач и оценке скорости их сходимости.

Рассмотренные методы

Название метода	Канонический вид	Условие сходимости в средне-квадратичной норме	Скорость сходимости
Метод релаксации	$\frac{x^{n+1}-x^n}{x^0-\tau} + Ax^n = f, \tau > 0, n \in Z_+$ $x^0 - \text{начальное приближение}$	$A^* = A > 0, \gamma = \max_{1 \leq k \leq m} \lambda_k^A, 0 < \tau < \frac{2}{\gamma}$ $x^0 - \text{любое}$	$A = A^* > 0, B = E$ $\gamma_1 = \min_{1 \leq k \leq m} \lambda_k^A, \gamma_2 = \max_{1 \leq k \leq m} \lambda_k^A$ $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi} \Rightarrow \ \nu^{n+1}\ \leq \rho \ \nu^n\ $
Метод Якоби	$D(x^{n+1} - x^n) + Ax^n = f, n \in Z_+$ $x^0 - \text{начальное приближение}$ $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$	Любое из: 1) $A = A^* > 0, 2D > A$ 2) $A = A^* > 0, a_{ij} > \sum_{j=1, j \neq i}^m a_{ij} $ $x^0 - \text{любое}$	$A = A^* > 0, B = B^* > 0$ $\exists \rho : 0 < \rho < 1, \frac{1-\rho}{\tau} B \leq A \leq \frac{1+\rho}{\tau} B \Rightarrow \ \nu^{n+1}\ _B \leq \rho \ \nu^n\ _B$
Метод Зейделя	$(D + R_1)(x^{n+1} - x^n) + Ax^n = f$ $n \in Z_+, x^0 - \text{нач. приближение}$ $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$ $R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$	$A = A^* > 0, x^0 - \text{любое}$	$A = A^* > 0, B = B^* > 0$ $\exists \gamma_1, \gamma_2 : 0 < \gamma_1 < \gamma_2, \gamma_1 B \leq A \leq \gamma_2 B$ $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \tau_0$ $\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \rho = \frac{1-\xi}{1+\xi} \Rightarrow \ \nu^{n+1}\ _B \leq \rho \ \nu^n\ _B$
Попеременно-треугольный итерационный метод	$(E + \omega R_1)(E + \omega R_2) \frac{x^{n+1} - x^n}{x^0 - \tau} + Ax^n = f$ $n \in Z_+, \omega > 0, \tau > 0$ $x^0 - \text{начальное приближение}$ $R_1 = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{m1}}{2} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \frac{a_{mm}}{2} \end{bmatrix}$ $R_2 = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{2} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ 0 & \frac{a_{22}}{2} & 0 & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{a_{mm}}{2} \end{bmatrix}$	$A = A^* > 0, \omega > \frac{\tau}{4}, x^0 - \text{любое}$	$A = A^* > 0, \exists \delta, \Delta > 0 : A > \delta E$ $R_2^s R_2 \leq \frac{\Delta}{4} A$ $\gamma_1 = \frac{\sqrt{\delta} \sqrt{\delta \Delta}}{2(\sqrt{\delta} + \sqrt{\Delta})}, \gamma_2 = \frac{\sqrt{\delta \Delta}}{4},$ $\omega = \frac{\sqrt{\delta \Delta}}{2}, \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$ $\eta = \frac{\delta}{\Delta}, \rho = \frac{1 - \sqrt{\eta}}{1 + 3\sqrt{\eta}}$ $B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2) \Rightarrow \ \nu^{n+1}\ _B \leq \rho \ \nu^n\ _B$

Глава II. Интерполирование и приближение функций

Основные идеи главы

Задача интерполирования состоит в нахождении значений функции $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ по ее значениям в узловых точках. $\forall f(x) \exists!$ интерполяционный полином степени n , построенный по $(n+1)$ -му узлу. Легко строится в виде полинома Лагранжа или Ньютона.

Если при решении задачи интерполирования полиномами недостаточно совпадения в узлах интерполяционного полинома с значением интерполируемой функции, а требуется равенство их производных до некоторого порядка, то применяются полиномы Эрмита $H_n(x)$.

Задача построения наилучшего среднеквадратичного приближения функции в вещественном гильбертовом пространстве L_2 состоит в следующем. Пусть задана система линейно независимых функций $\varphi_i(x) \in L_2, i = 0..n$, а $\varphi(x) \in L_2$ — приближаемая функция. Функция $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$ называется обобщенным многочленом по системе $\varphi_i(x)_0^n$. Многочлен $\bar{\varphi}(x) \in L_2$ называется наилучшим среднеквадратичным приближением функции $f(x)$ по системе функций $\varphi_i(x)_0^n$, если:

$$\|f(x) - \bar{\varphi}(x)\| = \min_{\varphi(x)} \|f(x) - \varphi(x)\| = \min_{\varphi(x)} \left(\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx \right)^{1/2}$$

Наилучшее среднеквадратичное приближение $\overline{\varphi(x)}$ существует и единственно, коэффициенты $\overline{c_0}, \overline{c_1}, \dots, \overline{c_n}$ находятся из СЛАУ с матрицей грамма. Для функций, заданных таблично, задача решается аналогично.

Если система ортонормированная — выполняется неравенство Бесселя $\sum_{k=0}^n c_k^2 \leq \|f\|^2$, для ортонормированного базиса достигается равенство Парсеваля $\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2$.

Для линейного пространства функций H , заданных таблично (в узлах), скалярным произведением $(f, g) = \sum_{i=0}^N f_i g_i$ и порождённой им нормой приближение строится аналогичным образом.

В главе II изучен так называемый кубический сплайн. Доказательство существования и единственности кубического сплайна содержит также метод его построения.

Рассмотренные методы

Название метода	Описание метода	Погрешность формулы
Интерполяционный полином Лагранжа	$L_n(x) = \sum_{k=0}^n C_k(x) f(x_k),$ $C_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)},$ $\omega'(x_k) = \left(\prod_{i \neq k}^n (x_k - x_i) \right)$	$ \psi_{L_n}(x) \leq \frac{\sup_{x \in [a,b]} f^{(n+1)}(x) }{(n+1)!} \omega(x) ,$
Интерполяционный полином Ньютона	$N_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) +$ $+ (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots +$ $+ (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ $f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^k \frac{f(x_i)}{f(x_i)\omega'_{0,k}(x_i)}$	Как у полинома Лагранжа. Так как интерполяционный полином Ньютона – это полином n-ой степени, записанный в другой форме.
Интерполяционный полином Эрмита	$H_n(x) = \sum_{k=0}^m \sum_{i=0}^{a_k-1} C_{k,i}(x) f^{(i)}(x_k)$ $C_{k,i}(x) - \text{полиномы степени } n.$ Коэффициенты ищутся из условия $H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k)$	$\psi_{H_n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{a_0} \dots (x - x_m)^{a_m},$ $a_0 + a_1 + \dots + a_m = n + 1$
Наилучшее среднеквадратичное приближение	$\bar{\varphi}(x) = \sum_{i=0}^n \bar{c}_i \varphi_i(x),$ коэффициенты ищутся из условия $\sum_{l=0}^n c_l(\varphi_k, \varphi_l) = (f, \varphi_k), \quad k = \overline{0, n},$ $c_l, l = \overline{0, n}$ (Аналогично для таблично заданных функций)	Отклонение: $\int_a^b (f(x) - \sum_{k=0}^n \bar{c}_k \varphi_k(x))^2 dx$
Кубический сплайн	$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 +$ $+ \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$	Свойства: $ f(x) - S(x) = o(h^4)$ $ f'(x) - S'(x) = o(h^3)$ $ f''(x) - S''(x) = o(h^2)$

Глава III. Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Основные идеи главы

Для решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений применяются методы последовательного приближения решения. Их идея заключается в задании некоторого начального приближения и построении такого итерационного процесса, при котором последующие итерации будут приближаться в некоторой норме к решению исходного нелинейного уравнения.

Одним из самых простых, но часто используемом на практике решения нелинейных уравнений является *метод простой итерации*. В нем очередное приближение получается по формуле $x^{n+1} = x^n + r(x^n)f(x^n)$. Выбор в указанной формуле $r(x^n)$ приводит к различным итерационным методам. Так $r(x) = -\frac{1}{f'(x^n)}$, $f'(x^n) \neq 0$ дает *метод Ньютона*, который сходится быстрее, чем метод простой итерации. Выбор $r(x) = -\frac{(x^n - x^{n-1})f(x^n)}{f(x^n) - f(x^{n-1})}$ приводит к *методу секущих*.

Рассмотренные методы

Название метода	Формула прерощения	Условие сходимости
Метод релаксации	$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + f(x^n) = 0,$ $x^{n+1} = S(x),$ $S(x) = x - \tau f(x),$ $\tau > 0, n \in Z_+, x_0 - \text{начальное}$ приближение, берется из локализованной окрестности, $x_0 \in U_a(x^*)$	Необходимое условие: $\sup_{x \in U_a(x^*)} 1 - \tau f'(x) < 1,$ т.е. $0 < \tau < \frac{2}{M}$, где $M = \sup_{x \in U_a(x^*)} f'(x)$
Метод Ньютона	$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}, n = 0, 1, \dots$ $x^0 \in U_a(x^*)$	$\exists M > 0 : \frac{1}{2} \left \left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right)' \right \leqslant M,$ $\forall x \in U_a(x^*), x^0 - x^* \leqslant \frac{1}{M}$ Тогда метод Ньютона сходится и имеет место оценка $ x^n - x^* \leqslant \frac{1}{M} (M x^0 - x^*)^{2^n}$
Модифицированный метод Ньютона	$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)} n = 0, 1, \dots$ $x^0 \in U_a(x^*)$	Сходится быстрее метода простой итерации, но медленнее метода Ньютона
Метод секущих	$x^{n+1} = -\frac{(x^n-x^{n-1})f(x^n)}{f(x^n)-f(x^{n-1})}, n = 0, 1, \dots,$ $x^0 \text{ и } x^1 \text{ заданы}$	

Глава IV. Разностные методы решения задач математической физики

Основные идеи главы

Задачи математической физики крайне редко решаются аналитически. Среди численных методов решения этих задач наиболее эффективными являются методы, основанные на построении разностных схем (т.н. разностные методы).

Для первой краевой задачи уравнения теплопроводности в главе IV рассмотрены явная и неявные разностные схемы. Доказано, что явная разностная схема условно устойчива и сходится при условии $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ и имеет первый порядок точности по τ и второй по h . Априорная оценка доказана в норме C . Чисто неявная разностная схема является абсолютно устойчивой в норме C и абсолютно сходящейся. Симметричная разностная схема (или схема Кранка-Никольсона) имеет второй порядок погрешности как по τ , так и по h . Сходимость и устойчивость этой схемы доказывается в среднеквадратичной норме. Для первой краевой задачи уравнения теплопроводности можно построить разностные схемы заданного качества и имеющие второй порядок точности по τ и четвертый по h .

Изучена разностная схема на пятиточечном шаблоне для первой краевой задачи уравнения Пуассона (задача Дирихле) в прямоугольнике. Опираясь на принцип максимума и выбирая нужным образом мажоранту, получена априорная оценка устойчивости в норме C по правой части уравнения. Рассмотренная разностная схема имеет второй порядок точности как по τ , так и по h^2 .

Рассмотренные методы

Название метода	Описание метода	Погрешность аппроксимации	Сходимость численного решения к точному
Явная разностная схема	$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i-1}^n - 2y_i^n + y_{i+1}^n}{h^2} + f(x_i, t_n),$ $\begin{cases} y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), t_{n+1} \in \bar{\omega}_\tau \\ y_N^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), t_{n+1} \in \bar{\omega}_\tau \end{cases},$ $y_i^0 = u_0(x_i), x_i \in \bar{\omega}_h$	$\psi_i^n = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} - \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\tau} + f_i^n,$ $\psi_i^n = O(\tau + h^2)$	Сходится в норме C. Необходимо и достаточно для сходимости и устойчивости: $\frac{\tau}{h^2} = \gamma \leq \frac{1}{2}$
Чисто неявная схема	$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\varepsilon} = \frac{y_{i-1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i+1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{n+1},$ $\begin{cases} y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), t_{n+1} \in \bar{\omega}_\tau \\ y_N^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), t_{n+1} \in \bar{\omega}_\tau \end{cases},$ $y_i^0 = u_0(x_i), x_i \in \bar{\omega}_h$	$\psi_i^n = \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\tau} + f_i^{n+1},$ $\psi_i^n = O(\tau + h^2)$	Чисто неявная разностная схема абсолютно сходится (имеем абсолютную сходимость первого порядка по τ и второго порядка по h). Сходится в норме C.
Симметричная разностная схема (схема Кранка-Никольсена)	$\frac{y_{\bar{x},i}^n}{y_i^{n+1} - y_i^n} = \frac{y_{i-1}^n - 2y_i^n + y_{i+1}^n}{h^2}$ $\frac{y_{i-1}^{n+1} - y_i^{n+1}}{\tau} = \frac{y_{\bar{x},i}^n + y_{\bar{x},i}^n}{2} + f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}})$ $\begin{cases} y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}) \\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \end{cases}$ $t_{n+1} \in \bar{\omega}_\tau, y_i^0 = u_0(x_i), x_i \in \bar{\omega}_h$	$\psi_i^n = -\frac{u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\tau} + \frac{u_{\bar{x},i}^{n+1} + u_{\bar{x},i}^n}{2} + f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}),$ $\psi_i^n = O(\tau^2 + h^2)$	Сходится в норме $\ z\ _{L_2(w_n)} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} z_i^2 h\right)^{\frac{1}{2}}$ Со вторым порядком как по τ , так и по h .
Разностная схема с весами	$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma y_{\bar{x},i}^{n+1} + (1 - \sigma) y_{\bar{x},i}^n + \varphi_i^n,$ $\begin{cases} y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}) \\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}) \end{cases}, y_i^0 = u_0(x_i)$ $(x_i, t_n) \in \omega_{h\tau}, t_{n+1} \in \bar{\omega}_\tau, x_i \in \bar{\omega}_h$ $\sigma \in \mathbb{R} - \text{весовой множитель}$	$\psi_i^n = \psi_i^n = \sigma u_{\bar{x},i}^{n+1} + (1 - \sigma) u_{\bar{x},i}^n - \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{\tau} + \varphi_i^n,$ $\varphi_i^n = f_i(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{12} f_i''(t_{n+\frac{1}{2}}),$ $\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{12\tau}{h^2} \Rightarrow \psi_i^n = O(\tau^2 + h^2)$ $\sigma = 0.5, \varphi_i^n = f_i(t_{n+\frac{1}{2}}) \Rightarrow \psi_i^n = O(\tau^2 + h^2)$ $\sigma \neq 0.5, \sigma \neq \sigma_* \Rightarrow \psi_i^n = O(\tau + h^2)$	Не изучалось.
Разностная схема для уравнения Пуассона (задача Дирихле)	$\frac{y_{\bar{x}_1, x_1, ij} + y_{\bar{x}_2, x_2, ij}}{i = 1, N_1 - 1, j = 1, N_2 - 1} = f_{i,j}$ $y_{ij} _{\Gamma_h} = \mu_{ij}$	$\psi_i^n = f_{ij} - u_{\bar{x}_1, x_1, ij} - u_{\bar{x}_2, x_2, ij}$ $\psi_i^n = O(h_1^2 + h_2^2)$	Сходится в норме C со вторым порядком по h_1 и h_2 .

Глава V. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем ОДУ

Основные идеи главы

Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)), & t > 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \end{cases} \quad (1)$$

Ее решение существует и единственно для некоторого t , если функция $f(t, u(t))$ непрерывна в параллелепипеде $\{|t| \leq a, |\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)| \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$ и, кроме того, удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу. Для численного решения задачи (1) наиболее широко в настоящее время используются две группы методов:

1. Методы Рунге-Куты,
2. Многошаговые разностные методы (в частности, метод Адамса).

При применении указанных методов к системам уравнений вводятся понятия *жёсткости* и *области устойчивости*.

Первую краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u(x) + f(x) = 0, \quad x \in (0, 1) \quad (2)$$

с краевым условиям первого рода при $x = 0, x = 1$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \quad (3)$$

решают интегро-интерполяционным методом (методом баланса) построения разностных схем.

Рассмотренные методы

Название метода	Описание метода	Погрешность формулы
Метод Рунге-Кутты	$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 K_1 + \sigma_2 K_2 + \dots + \sigma_m K_m$ $K_1 = f(t_n, y_n),$ $K_2 = f(t_n + a_2 \tau, y_n + b_{21} \tau K_1),$ $K_3 = f(t_n + a_3 \tau, y_n + b_{31} \tau K_1 + b_{32} \tau K_2),$... $K_m = f(t_n + a_m \tau, y_n + b_{m1} \tau K_1 + b_{m2} \tau K_2 + \dots + b_{mm-1} \tau K_{m-1})$	Однопараметрическое семейство разностных схем $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = (1 - \sigma) f(t_n, y_n) + \sigma f(t_n + a\tau, y_n + a\tau f(t_n, y_n))$ $\psi_n = O(\tau^2)$, если $a\tau = 0.5$ $z_n \leq M\tau^2, M > 0$ и не зависит от τ
Многошаговые разностные методы	$\sum_{k=0}^m \frac{a_k}{\tau} y_{n-k} = \sum_{k=0}^m b_k f_{n-k},$ $a_0 \neq 0, b_m \neq 0, n = m, m+1, \dots$ $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}$ - заданы При $b = 0$ метод называется явным, в противном случае неявным. Условие нормировки: $\sum_{k=0}^m b_k$	Для достижения порядка аппроксимации p должны выполняться следующие условия: $a_0 = -\sum_{k=1}^m a_k$ $b_0 = 1 - \sum_{k=1}^m b_k$ $\sum_{k=0}^m k^{l-1} (a_k k + l b_k) = 0, l = 1, 2, \dots, p$

Глава VI. Приближённое вычисление определённых интегралов

Основные идеи главы

Одним из самых распространенных приемов приближенного вычисления определенных интегралов в вычислительной математике является подход, основанный на построении квадратурных формул. Смысл этих формул состоит в том, что определенный интеграл заменяется конечной суммой $\sum_{k=1}^n (c_k f(x_k))$, где $f(x_k)$ – значение подынтегральной функции в узлах x_k , а выбор коэффициентов c_k позволяет вычислить интеграл с требуемой точностью. Для рассмотренных в главе квадратурных формул исследуется погрешность вычисления как на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i], i = 1..n$, так и на всем промежутке интегрирования.

Рассмотренные методы